

# Cellules de Kazhdan-Lusztig dans les groupes de Weyl affines (à paramètres inégaux)

Jérémie Guilhot

University of Aberdeen  
Université Claude Bernard Lyon 1

Janvier 2008

Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien de dimension  $r$ . Un système de racines  $\Phi$  est un ensemble de vecteurs non nuls tel que:

- $\Phi$  engendre  $V$ .
- Pour tout  $\alpha \in \Phi$ , on a  $\mathbb{R}\alpha \cap \Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ .
- Pour tout  $\alpha \in \Phi$ ,  $\Phi$  est stable sous l'action de la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan perpendiculaire à  $\alpha$ .
- Pour tout  $\alpha, \beta \in \Phi$ , on a  $\frac{2\langle \alpha, \beta \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ .

Soit  $\Phi$  un système de racines "irréductible". Le groupe de Weyl de  $\Phi$  est le groupe engendré par les  $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ :

$$\{\sigma_{\alpha_1}, \dots, \sigma_{\alpha_r} \mid (\sigma_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_j})^{m_{i,j}} = 1, \sigma_{\alpha_i}^2 = 1\}$$

et  $m_{i,j} \in \{2, 3, 4, 6\}$  pour tout  $i \neq j$ .

Soit  $Q$  le réseau engendré par  $\Phi$ :

$$\{n_1\alpha_1 + \dots + n_k\alpha_k \mid n_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \in \Phi\}$$

Le groupe de Weyl  $W_0$  de  $\Phi$  agit sur  $Q$ .

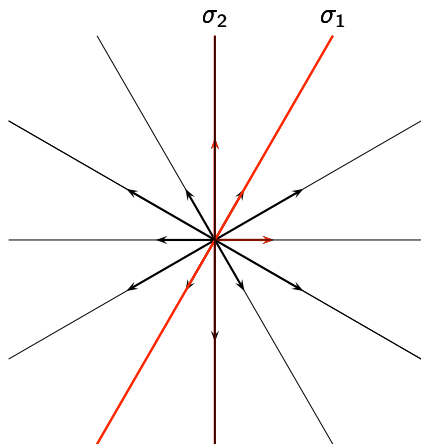
On peut donc former le produit semi-direct

$$W := W_0 \ltimes Q$$

et  $W$  est le groupe de Weyl affine associé à  $\Phi$ .

$V$ : Espace euclidien de dimension  $r$ .

$\Phi$ : Système de racines irréductible.



A tout  $\alpha \in \Phi$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on associe :

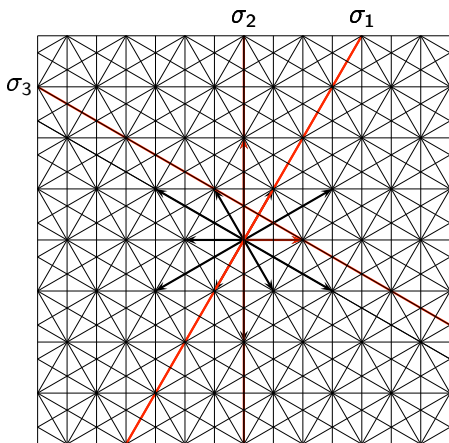
$$H_{\alpha,k} = \{x \in V \mid \frac{2\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = k\}.$$

Le groupe de Weyl  $W_0$  de  $\Phi$  est engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans  $H_{\alpha,0}$ . On a :

$$W_0 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid (\sigma_1 \sigma_2)^6 = 1, \sigma_i^2 = 1 \rangle$$

$V$ : Espace euclidien de dimension  $r$ .

$\Phi$ : Système de racines irréductible.



A tout  $\alpha \in \Phi$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on associe :

$$H_{\alpha,k} = \{x \in V \mid \frac{2\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = k\}.$$

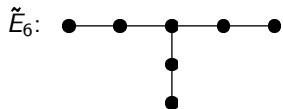
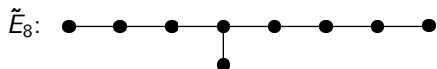
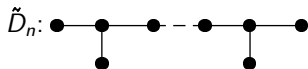
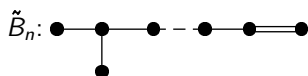
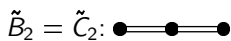
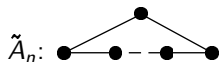
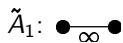
Le groupe de Weyl  $W_0$  de  $\Phi$  est engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans  $H_{\alpha,0}$ . On a :

$$W_0 = \langle \sigma_1, \sigma_2 \mid (\sigma_1\sigma_2)^6 = 1, \sigma_i^2 = 1 \rangle$$

Le groupe de Weyl affine  $W$  de  $\Phi$  est engendré par toutes les réflexions orthogonales  $\sigma_{H_{\alpha,k}}$ .

Dans cet exemple, on a :

$$W = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid (\sigma_1\sigma_2)^6 = 1, (\sigma_2\sigma_3)^3 = 1, (\sigma_1\sigma_3)^2 = 1, \sigma_i^2 = 1 \rangle$$



Soit  $W$  un groupe de Weyl affine engendré par  $S$ .

Soit  $w \in W$ . La longueur de  $w$  est le plus petit entier naturel  $n$  tel que l'on puisse écrire  $w = s_1 \dots s_n$  avec  $s_i \in S$ .

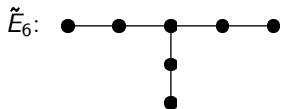
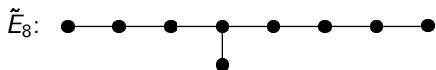
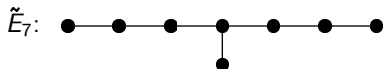
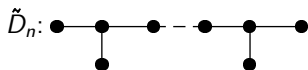
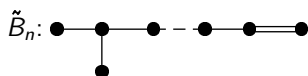
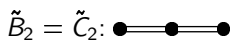
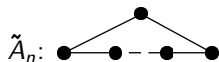
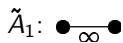
Une fonction de poids  $L$  est une fonction  $L : W \rightarrow \mathbb{N}$  telle que:

$$L(ww') = L(w) + L(w') \text{ si } \ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$$
$$L(w) > 0 \text{ sauf si } w = 1$$

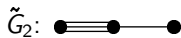
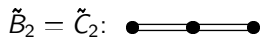
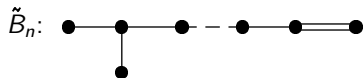
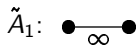
Quand  $L = \ell$  on dit qu'on est dans le cas des "paramètres égaux".

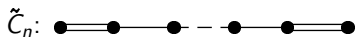
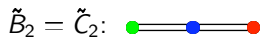
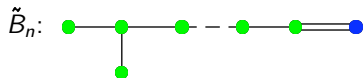
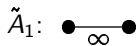
En utilisant les relations précédentes, on voit que:

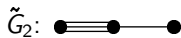
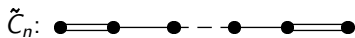
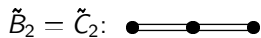
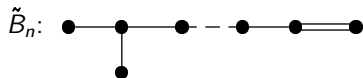
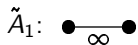
- Une fonction de poids  $L$  est complètement déterminée par ses valeurs sur  $S$ .
- Soient  $s, t \in S$ , si l'ordre de  $(st)$  est impair, alors  $L(s) = L(t)$ .

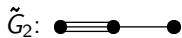
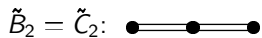
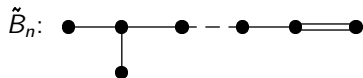
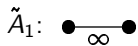


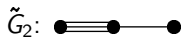
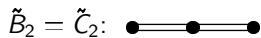
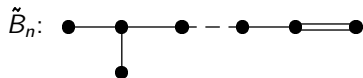
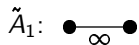












Soit  $(W, S)$  un groupe de Weyl affine et  $L$  une fonction de poids.

Soit  $\mathcal{H}$  l'algèbre de Iwahori-Hecke associée définie sur  $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ .

Base "standard" de  $\mathcal{H}$  :  $\{T_w \mid w \in W\}$ . Multiplication :

$$T_s T_w = \begin{cases} T_{sw} & \text{if } \ell(sw) > \ell(w) \\ T_{sw} + (v^{L(s)} - v^{-L(s)}) T_w & \text{if } \ell(sw) < \ell(w) \end{cases}$$

On voit que  $T_s^{-1} = T_s - (v^{L(s)} - v^{-L(s)}) T_1$ .

Il existe une unique involution  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ,  $a \mapsto \bar{a}$ , telle que  $\bar{v} = v^{-1}$ .

On peut l'étendre à une involution  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $h \mapsto \bar{h}$ :

$$\overline{\sum_{w \in W} a_w T_w} = \sum_{w \in W} \bar{a}_w T_{w^{-1}}^{-1} \quad (a_w \in \mathcal{A}).$$

## Théorème. KAZHDAN-LUSZTIG ( $\sim 1979$ ) LUSZTIG ( $\sim 1983$ )

Pour tout  $w \in W$ , il existe un unique  $C_w \in \mathcal{H}$  tel que:

- $\overline{C_w} = C_w$
- $C_w = T_w + \sum_{\ell(y) < \ell(w)} P_{y,w} T_y \quad (P_{y,w} \in v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}])$

De plus, les  $C_w$  forment une base de  $\mathcal{H}$ , appelée la base de Kazhdan-Lusztig.

On a par exemple

$$C_1 = T_1 \quad \text{et} \quad C_s = T_s + v^{-L(s)} T_1.$$

On définit le pré-ordre  $\leq_L$  par :

$$\mathcal{H}C_w \subset \sum_{y \leq_L w} \mathcal{A}C_y$$

Soient  $s \in S$  et  $w \in W$  tels que  $\ell(w) < \ell(sw)$ , on a :

$$C_s C_w = C_{sw} + \dots \quad \text{et donc } sw \leq_L w.$$

On note  $\sim_L$  la relation d'équivalence associée.

Les classes d'équivalences sont appelées cellules gauches.

De la même manière, on définit  $\leq_R$ ,  $\sim_R$  et les cellules droites.



On écrit  $y \leq_{LR} w$  si et seulement si il existe une suite

$$y = y_0, y_1, \dots, y_n = w$$

telle que pour tout  $0 \leq i \leq n - 1$  on ait

$$y_i \leq_L y_{i+1} \text{ ou } y_i \leq_R y_{i+1}.$$

On obtient la relation d'équivalence  $\sim_{LR}$  et les cellules bilatères.

Constantes de structure par rapport à la base de Kazhdan-Lusztig:

$$C_x C_y = \sum_{z \in W} h_{x,y,z} C_z \text{ où } h_{x,y,z} \in \mathcal{A}.$$

G. LUSZTIG (1985): Fonction  $a: W \rightarrow \mathbb{N}_0$  défini par

$$a(z) = \min\{i \geq 0 \mid v^{-i} h_{x,y,z} \in \mathbb{Z}[v^{-1}] \forall x, y \in W\}.$$

(On pose  $a(z) = \infty$  si l'ensemble est vide)

Si  $W$  est fini, on a clairement  $a(z) < \infty$ .

Soit  $\tilde{\nu} = L(w_0)$  où  $w_0$  est l'élément de longueur maximale du groupe de Weyl associé à  $W$ . On a

$$v^{-\tilde{\nu}} h_{x,y,z} \in \mathbb{Z}[v^{-1}] \text{ pour tout } x, y, z \in W.$$

En d'autres termes,  $a(z) \leq \tilde{\nu}$  pour tout  $z \in W$ .

Le pré-ordre  $\leq_{LR}$  induit un ordre partiel sur les cellules bilatères.

### Théorème.

Soit

$$c_0 = \{w \in W \mid a(w) = \tilde{\nu}\}.$$

$c_0$  est une cellule bilatère, minimale pour l'ordre partiel  $\leq_{LR}$ .

Pourquoi minimale? Conjecture de Lusztig :

$$\text{Si } z \leq_{LR} z' \text{ alors } a(z') \leq a(z).$$

Soient  $z' \in c_0$  et  $z \in W$  tels que  $z \leq_{LR} z'$ . On a:

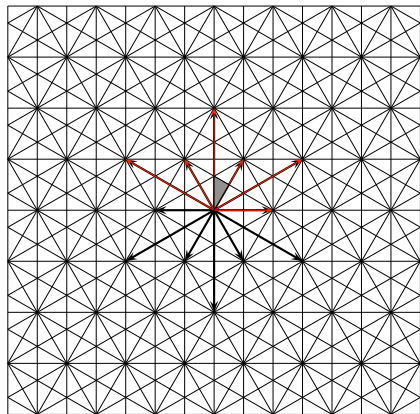
$$\tilde{\nu} = a(z') \leq a(z) \leq \tilde{\nu}$$

ce qui implique  $a(z) = \tilde{\nu}$  et  $z \in c_0$ .

- Shi ( $\sim 1987$ ):  $c_0$  est une cellule bilatère (paramètres égaux).
- Shi ( $\sim 1988$ ):  $c_0$  contient  $|W_0|$  cellules gauches (paramètres égaux).
- Bremke et Xi ( $\sim 1996$ ):  $c_0$  est une cellule bilatère (paramètres inégaux).
- Bremke ( $\sim 1996$ ):  $c_0$  contient au plus  $|W_0|$  cellules gauches.
- Bremke ( $\sim 1996$ ):  $c_0$  contient  $|W_0|$  cellules gauches lorsque les paramètres proviennent d'un automorphisme de graphe.

Quand on connaît le nombre exact de cellules gauches, la preuve utilise des propriétés très “profondes” des polynômes de Kazhdan-Lusztig e.g. la positivité des coefficients.

Problème: FAUX dans le cas des paramètres inégaux!

Exemple:  $\tilde{G}_2$  $V$ : Espace euclidien de dimension  $r$ . $\Phi$ : Système de racines irréductible.Pour  $\alpha \in \Phi$  et  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose :

$$H_{\alpha,k} = \left\{ x \in V \mid \frac{2\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} = k \right\}$$

Une alcôve est une composante connexe de

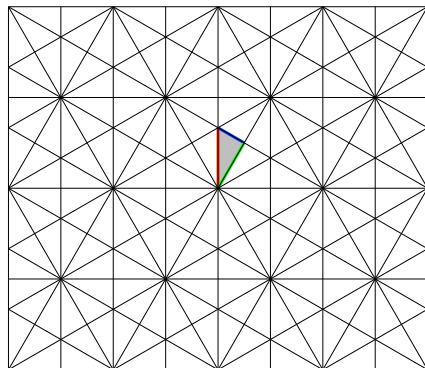
$$V - \bigcup H_{\alpha,k}$$

Soit  $X$  l'ensemble des alcôves.Soit  $\Omega = \langle \sigma_{H_{\alpha,k}}, k \in \mathbb{Z}, \alpha \in \Phi \rangle$  $\Omega$  agit simplement transitivement sur  $X$ .Soit  $A_0$  l'alcôve définie par

$$A_0 = \left\{ x \in V \mid 0 < \frac{2\langle \alpha, x \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} < 1, \text{ pour tout } \alpha \in \Phi^+ \right\}.$$

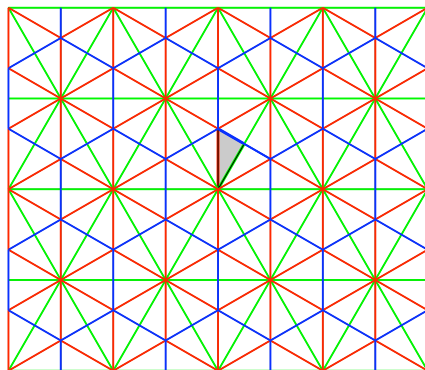
On considère les faces d'une alcôve.

Exemples : Les faces de  $A_0$ .



On considère les faces d'une alcôve.

Exemples : Les faces de  $A_0$ .



On regarde les orbites des faces sous l'action de  $\Omega$ . On note  $S$  l'ensemble de ces orbites.

Dans notre exemple, on a 3 orbites:

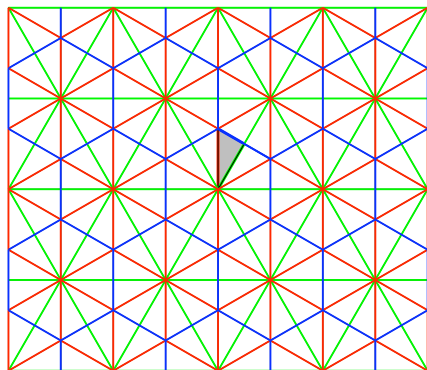
$$s_1 = \text{vert}$$

$$s_2 = \text{rouge}$$

$$s_3 = \text{bleu}$$

On considère les faces d'une alcôve.

Exemples : Les faces de  $A_0$ .



On regarde les orbites des faces sous l'action de  $\Omega$ . On note  $S$  l'ensemble de ces orbites.

Dans notre exemple, on a 3 orbites:

$$s_1 = \text{vert}$$

$$s_2 = \text{rouge}$$

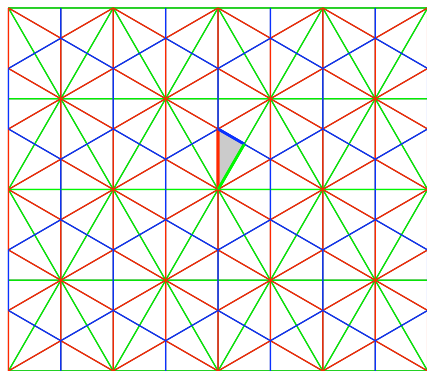
$$s_3 = \text{bleu}$$

Chaque  $s \in S$  définit une involution  $A \mapsto sA$  de  $X$ , où  $sA$  est l'unique alcôve qui partage avec  $A$  une face de type  $s$ . Le groupe engendré par ces involutions est un groupe de Coxeter  $W$ . On a  $W \simeq \Omega$ .



L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

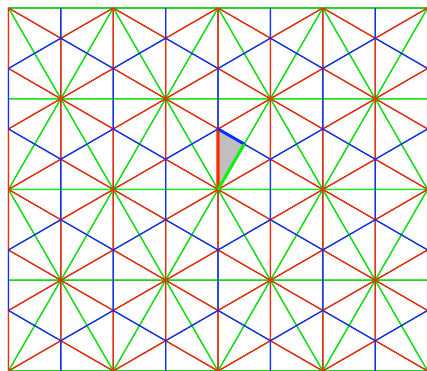


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

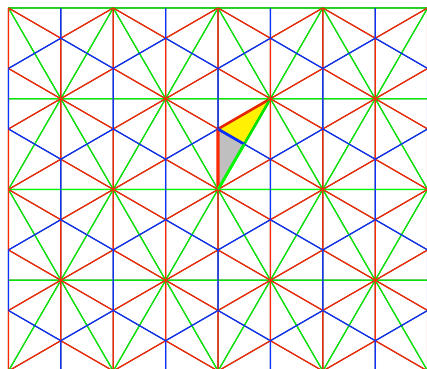


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

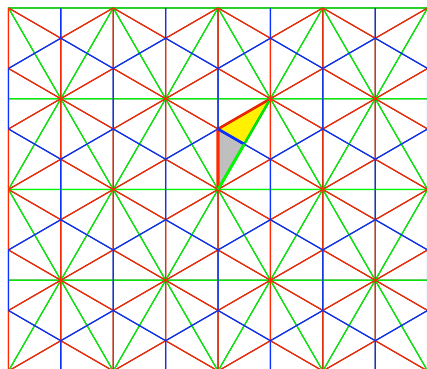


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- $s_3 A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

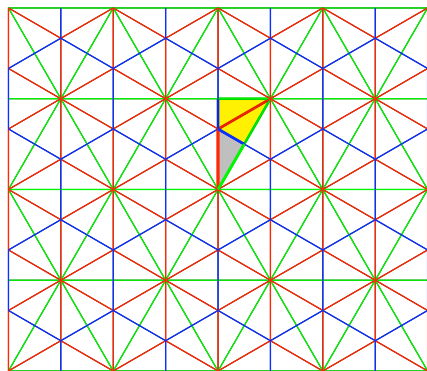


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

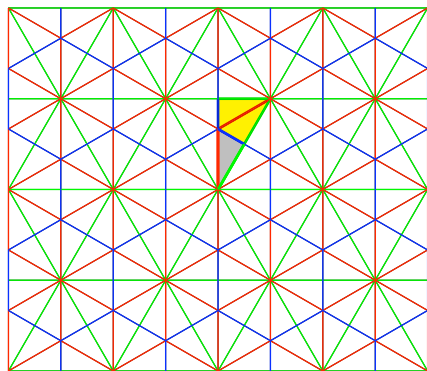


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,  $s_2s_3A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

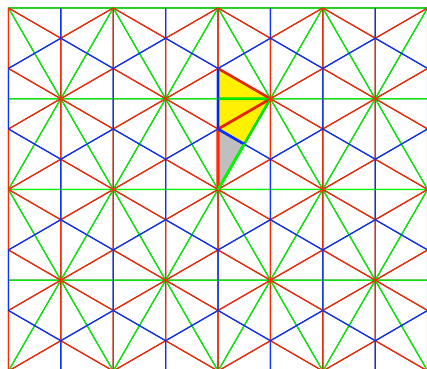


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,  $s_2s_3A_0$ ,  $s_1s_2s_3A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

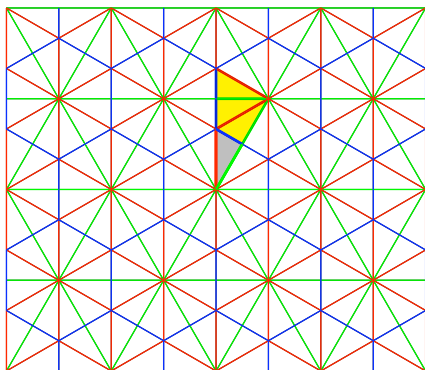


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,  $s_2s_3A_0$ ,  $s_1s_2s_3A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .



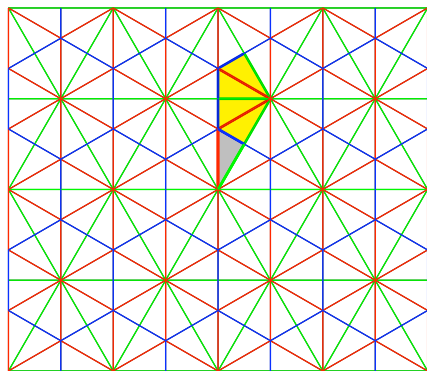
Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,
- $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,



L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

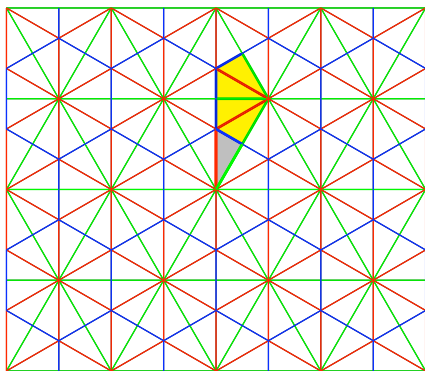


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,  $s_2s_3A_0$ ,  $s_1s_2s_3A_0$ ,
- $s_2s_1s_2s_3A_0$ ,

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

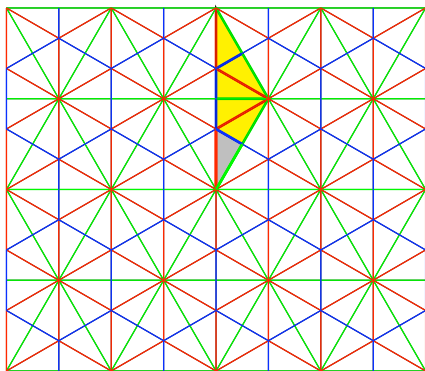


Exemples:

- alcôve  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .
- $s_3A_0$ ,  $s_2s_3A_0$ ,  $s_1s_2s_3A_0$ ,
- $s_2s_1s_2s_3A_0$ ,  $s_3s_2s_1s_2s_3A_0$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

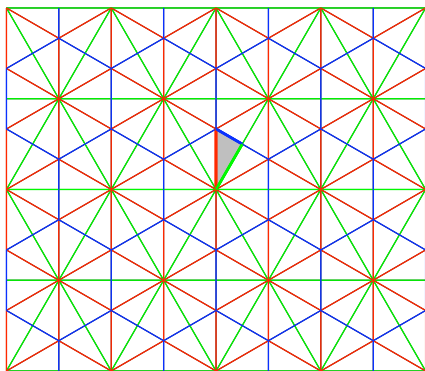


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,
- $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

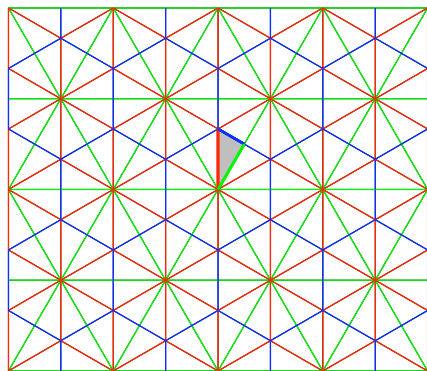


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .  
 $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  
 $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- On a  $(s_2 s_1)^6 = e$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

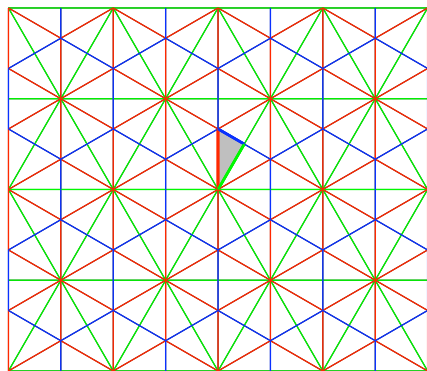


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .  
 $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  
 $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- On a  $(s_2 s_1)^6 = e$ .
- On a  $(s_2 s_3)^3 = e$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

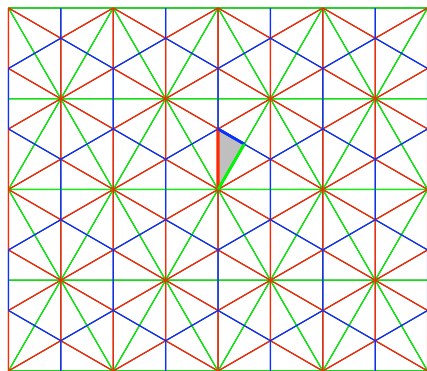


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .  
 $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  
 $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- On a  $(s_2 s_1)^6 = e$ .
- On a  $(s_2 s_3)^3 = e$ .
- On a  $(s_1 s_3)^2 = e$ .

L'action de  $W$  sur  $X$  commute avec l'action de  $\Omega$ .

On identifie  $w \in W$  avec l'alcôve  $wA_0$ .

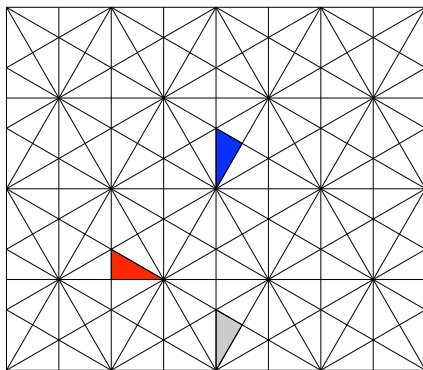


Exemples:

- alcôve  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .  
 $s_3 A_0$ ,  $s_2 s_3 A_0$ ,  $s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  
 $s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ ,  $s_3 s_2 s_1 s_2 s_3 A_0$ .
- On a  $(s_2 s_1)^6 = e$ .
- On a  $(s_2 s_3)^3 = e$ .
- On a  $(s_1 s_3)^2 = e$ .

Soient  $s, t \in S$ . Si un hyperplan  $H$  contient une face de type  $s$  et une face de type  $t$  alors  $s$  et  $t$  sont conjugués dans  $W$ . On peut donc associer à tout hyperplan  $H$  un poids  $c_H$  tel que  $c_H = L(s)$  si  $H$  contient une face de type  $s$ .

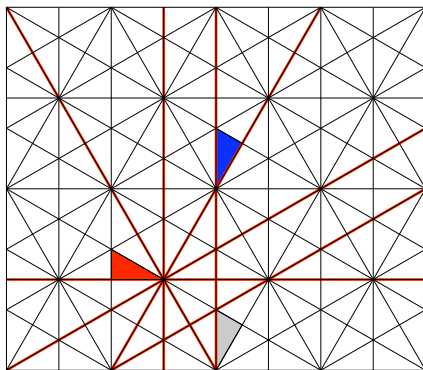
Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .



Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.



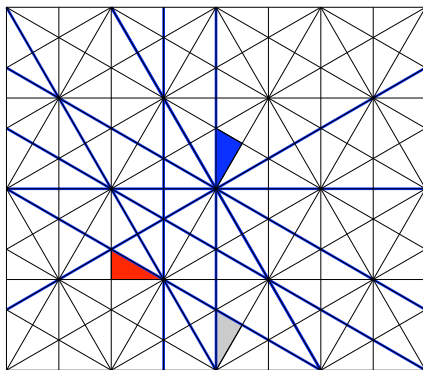
Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .



Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.

Hyperplans séparant  $A_0$  and  $yA_0$ ;

Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .

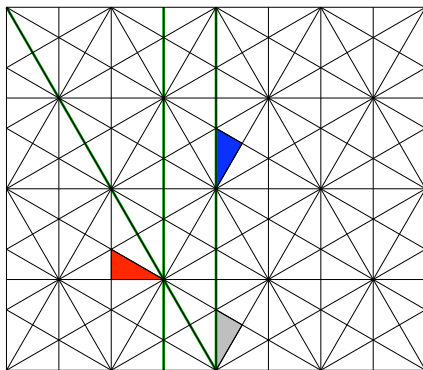


Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.

Hyperplans séparant  $A_0$  and  $yA_0$ ;

Hyperplans séparant  $yA_0$  and  $xyA_0$ ;

Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .



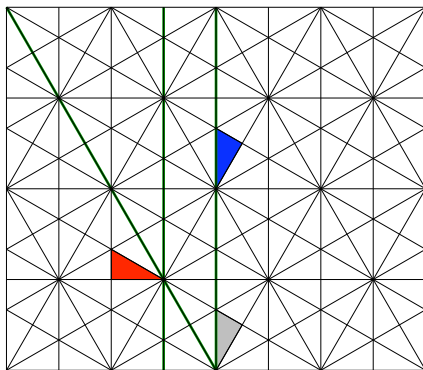
Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.

Hyperplans séparant  $A_0$  and  $yA_0$ ;

Hyperplans séparant  $yA_0$  and  $xyA_0$ ;

Soit  $H_{x,y}$  l'intersection de ces 2 ensembles.

Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .



Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.

Hyperplans séparant  $A_0$  and  $yA_0$ ;

Hyperplans séparant  $yA_0$  and  $xyA_0$ ;

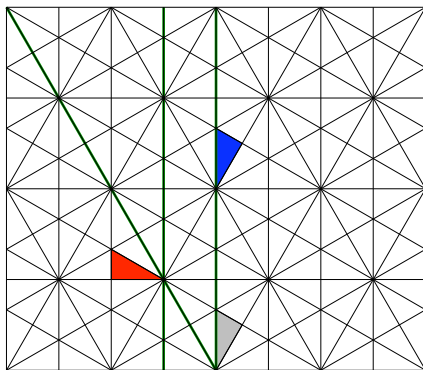
Soit  $H_{x,y}$  l'intersection de ces 2 ensembles.

On définit une constante  $c_{x,y} \dots$

Dans cet exemple, on a

$$c_{x,y} = L(s_2) + L(s_1).$$

Soit  $w \in W$ , on a  $\ell(w) =$  nombre d'hyperplans qui séparent  $A_0$  and  $wA_0$ .



Soient  $x, y \in W$  et  $yA_0, xyA_0$  les alcôves correspondantes.

Hyperplans séparant  $A_0$  and  $yA_0$ ;

Hyperplans séparant  $yA_0$  and  $xyA_0$ ;

Soit  $H_{x,y}$  l'intersection de ces 2 ensembles.

On définit une constante  $c_{x,y} \dots$

Dans cet exemple, on a

$$c_{x,y} = L(s_2) + L(s_1).$$

### Proposition. G. ( $\sim 2006$ )

On a :

$$T_x T_y = \sum_{z \in W} f_{x,y,z} T_z \text{ où } \deg(f_{x,y,z}) \leq c_{x,y}.$$

**Théorème. GECK (~ 2003)**

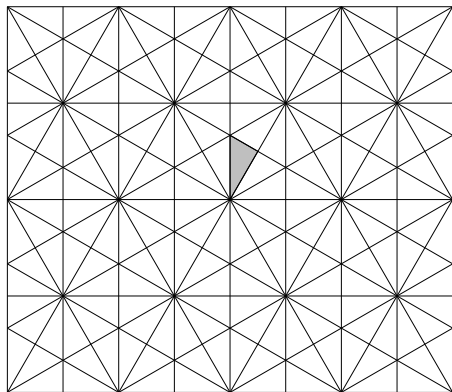
Soit  $W' \subseteq W$  un sous groupe parabolique standard et  $X'$  l'ensemble des  $w$  tels que  $w$  est de longueur minimale dans  $wW'$ . Soit  $\mathcal{C}$  une cellule gauche de  $W'$ .

Alors  $X'.\mathcal{C}$  est une union de cellules gauches.

Théorème. GECK ( $\sim 2003$ )

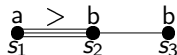
Soit  $W' \subseteq W$  un sous groupe parabolique standard et  $X'$  l'ensemble des  $w$  tels que  $w$  est de longueur minimale dans  $wW'$ . Soit  $\mathcal{C}$  une cellule gauche de  $W'$ .

Alors  $X' \cdot \mathcal{C}$  est une union de cellules gauches.



Prenons l'exemple de  $\tilde{G}_2$  avec

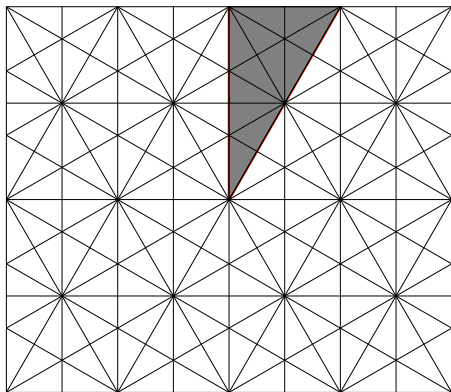
$W' = \langle s_1, s_2 \rangle$  et paramètres:



### Théorème. GECK ( $\sim 2003$ )

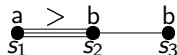
Soit  $W' \subseteq W$  un sous groupe parabolique standard et  $X'$  l'ensemble des  $w$  tels que  $w$  est de longueur minimale dans  $wW'$ . Soit  $\mathcal{C}$  une cellule gauche de  $W'$ .

Alors  $X' \cdot \mathcal{C}$  est une union de cellules gauches.



Prenons l'exemple de  $\tilde{G}_2$  avec

$W' = \langle s_1, s_2 \rangle$  et paramètres:



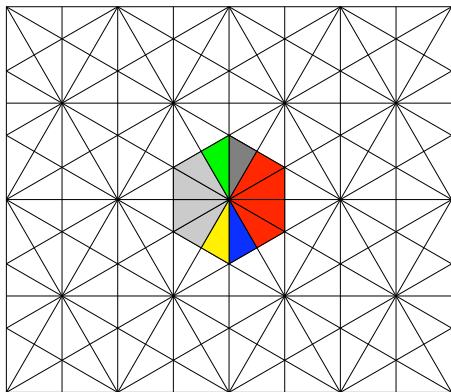
$X'A_0$  est de la forme...



Théorème. GECK ( $\sim 2003$ )

Soit  $W' \subseteq W$  un sous groupe parabolique standard et  $X'$  l'ensemble des  $w$  tels que  $w$  est de longueur minimale dans  $wW'$ . Soit  $\mathcal{C}$  une cellule gauche de  $W'$ .

Alors  $X' \cdot \mathcal{C}$  est une union de cellules gauches.



Prenons l'exemple de  $\tilde{G}_2$  avec

$W' = \langle s_1, s_2 \rangle$  et paramètres:

$$\begin{array}{ccc} a & > & b \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ s_1 & & s_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ s_3 \end{array}$$

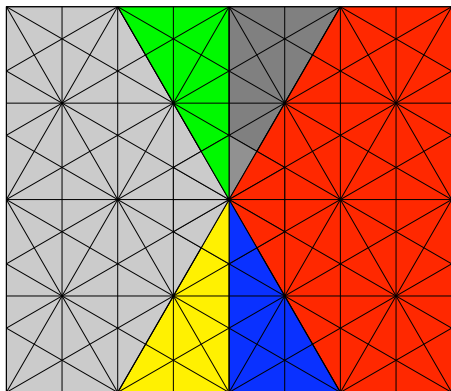
$X'A_0$  est de la forme...

La décomposition en cellules gauches...

Théorème. GECK ( $\sim 2003$ )

Soit  $W' \subseteq W$  un sous groupe parabolique standard et  $X'$  l'ensemble des  $w$  tels que  $w$  est de longueur minimale dans  $wW'$ . Soit  $\mathcal{C}$  une cellule gauche de  $W'$ .

Alors  $X' \cdot \mathcal{C}$  est une union de cellules gauches.



Prenons l'exemple de  $\tilde{G}_2$  avec

$W' = \langle s_1, s_2 \rangle$  et paramètres:

$$\begin{array}{ccc} a & > & b \\ \bullet & \text{---} & \bullet \\ s_1 & & s_2 \end{array} \quad \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ s_3 \end{array}$$

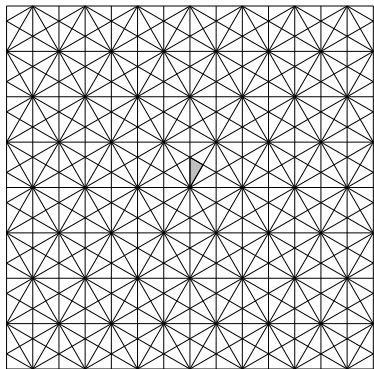
$X'A_0$  est de la forme...

La décomposition en cellules gauches...

Le théorème implique...

$$W = \tilde{G}_2 : \begin{array}{ccc} a & b & b \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{array}$$

$$W_0 := \begin{array}{ccc} & & \\ \bullet & \bullet & \\ s_1 & s_2 & \end{array}$$



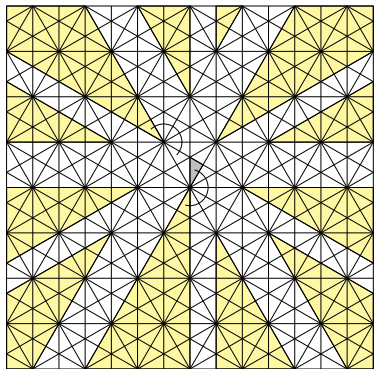
Pour  $J \subset S$ , on dénote par  $W_J$  le groupe engendré par  $J$  et par  $w_J$  le mot le plus long de  $W_J$ . On considère les sous parties  $J$  de  $S$  telles que  $W_J$  est isomorphe à  $W_0$ . Ici, on trouve  $J = \{s_1, s_2\}$  et  $w_J = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2$ . On a

$$c_0 = \{w \in W \mid w = z.w_J.z', z, z' \in W\}.$$



$$W = \tilde{G}_2 : \begin{array}{c} a \qquad b \qquad b \\ \bullet \qquad \bullet \qquad \bullet \\ s_1 \quad s_2 \quad s_3 \end{array}$$

$$W_0 := \begin{array}{c} \bullet \qquad \bullet \\ s_1 \quad s_2 \end{array}$$



Pour  $J \subset S$ , on dénote par  $W_J$  le groupe engendré par  $J$  et par  $w_J$  le mot le plus long de  $W_J$ . On considère les sous parties  $J$  de  $S$  telles que  $W_J$  est isomorphe à  $W_0$ . Ici, on trouve

$$J = \{s_1, s_2\} \text{ et } w_J = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2.$$

On a

$$c_0 = \{w \in W \mid w = z.w_J.z', z, z' \in W\}.$$

De plus, soit  $M_J = \{z \in W \mid sw_Jz \notin c_0, \text{ pour tout } s \in J\}$ . On a :

$$c_0 = \bigcup_{z \in M_J} \{w \in W \mid w = x.w_J.z, x \in W\}$$

## Théorème. G. ( $\sim$ 2007)

Soit  $z \in M_J$ . L'ensemble  $\{w \in W \mid w = x.w_J.z, x \in W\}$  est un "idéal à gauche". En particulier, c'est une union de cellules gauches.

Cela implique:

- $c_0$  contient exactement  $|W_0|$  cellules gauches.
- Pour tout  $z \in M_J$ , l'ensemble  $\{w \in W \mid w = x.w_J.z, x \in W\}$  est une cellule gauche.

$$\begin{array}{c} a \\ \bullet \\ s_1 \end{array} \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ s_2 \end{array} \begin{array}{c} b \\ \bullet \\ s_3 \end{array}, \text{ for all } a > 3b$$

